1974 г. январь—февраль *т. XXIX, вып. 1 (175)*

УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

СООБЩЕНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

ИЗУЧЕНИЕ ФАЗОВОГО ПЕРЕХОДА ВТОРОГО РОДА В АСИМПТОТИЧЕСКИХ ИЕРАРХИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ ДАЙСОНА

П. М. Блехер

Асимптотические иерархические модели (а.и.м.) Дайсона были введены в работе [1]. Они представляют собой классические решетчатые ферромагнитные системы с дальнодействующим парным потенциалом. На расстояних, больших некоторого, парное взаимодействие в а.и.м. совпадает с взаимодействием в иерархических моделях Дайсона [1]—[3]. Последние зависят от двух параметров — r и c. Величина $d_{\Gamma} = \log_2 r$ играет роль геометрической размерности модели, величина $d_a = \dfrac{2}{1-\log_r c}$ — аномальной размерности по Вилсону, т. е. размерности, определяемой термодинамическими свойствами системы. Методами работы Дайсона [3] можно доказать существование в а. и. м. при низких температурах фазового перехода первого рода при $1 < c < r$. В статье [1], при определенных условиях на гамильтониан а. и. м., доказано существование критической температуры T_{cr}, при которой средний спин в пределе $V \to \infty$ имеет гауссовское распределение при нестандартной нормировке. Именно, существует показатель $0 < \zeta < 1/2$ такой, что случайная величина $\dfrac{S_1+\ldots+S_V}{V^{\zeta}}$ имеет при $T = T_{cr}$ и $V \to \infty$ гауссовское распределение. В настоящей заметке исследуется поведение а. и. м. в окрестности критической точки $T = T_{cr}$. На гамильтониан а. и. м., как и в работе [1], мы накладываем два условия. Первое состоит в том, что $\sqrt{r} < c < r$. При этом условии гауссовское распределение обладает определенными свойствами устойчивости. Второе условие содержит несколько требований на функцию распределения среднего спина $\dfrac{S_1+\ldots+S_{V_0}}{V_0}$ в конечном объеме $V_0 = r^{n_0}$ точек. Второе условие обозначим (W). Мы обозначаем далее ξ_V — средний спин в объеме V, $f_n(u;\ T,\ H)\Delta_n$ — вероятность, вычисленную по гиббсовскому распределению при температуре T и внешнем поле H, того, что случайная величина ξ_V принимает значение u. Функция $f_n(u;\ T,\ H)$ определена на конечной решетке точек $M_n = \left\{\dfrac{-V+2i}{V^{1/2}}\right\}_{i=0}^{V}$, $\sum\limits_{u\in M_n} f_n(u;\ T, H)\,\Delta_n = 1$, $\Delta_n = \dfrac{2}{V^{1/2}}$ — шаг решетки M_n. Легко видеть, что $f_n(u;\ T,\ H)$ — четная функция от u [1]. Мы обозначаем $\beta = T^{-1}$, $\tau = \dfrac{T-T_{cr}}{T_{cr}}$. Подчеркнем, что мы рассматриваем только малые значения τ и малые значения внешнего поля H.

Теорема 1. *Если выполнены условия* $\sqrt{r} < c < r$ *и* (W), *то при* $T > T_{cr}$ *функции* $f_n(u;\, T,\, 0)$ *равномерно сходятся к гауссовской плотности* $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1(T)}}\cdot e^{-\frac{u^2}{2\sigma_1(T)}}$. *Дисперсия* $\sigma_1(T) \sim \mathrm{const}\cdot\tau^{-1}$ *при* $T \to T_{cr}$.

Теорема 2. *Если выполнены условия* $\sqrt{r} < c < r$ *и* (W), *то при* $T < T_{cr}$ *существует последовательность чисел* $0 < M_1 < M_2 < \ldots$, $\lim\limits_{i\to\infty} M_i = M = M(T)$, *зависящих от* T, *такая, что функции* $f_n(u - V^{1/2}\cdot M_n;\ T,\ 0)$ *и* $f_n(u + V^{1/2} M_n;\ T,\ 0)$, $V = r^n$, *равномерно на любом компакте сходятся при* $n \to \infty$ *к гауссовской плотности* $\frac{1}{2\sqrt{2\pi\sigma_2(T)}}\, e^{-\frac{u^2}{2\sigma_2(T)}}$. *При* $T \to T_{cr}$ *справедливы асимптотические формулы* $\sigma_2(T) \sim \mathrm{const}\cdot(-\tau)^{-1}$, $M(T) \sim \mathrm{const}\cdot(-\tau)^{1/2}$.

Теорема 3. *Если выполнены условия* $\sqrt{r} < c < r$ *и* (W), *то при ненулевом внешнем поле* H *и любой температуре* T *существует последовательность чисел* $M_1, M_2, \ldots, \lim\limits_{i\to\infty} M_i = M = M(T, H)$, *зависящих от* T *и* H, *такая, что функции* $f_n(u - V^{1/2}\cdot M_n;\ T, H)$ *сходятся при* $n \to \infty$ *к гауссовскому распределению.*

В теореме 4 мы формулируем дополнительные свойства функций $M(T)$ и $M(T, H)$, введенных в теоремах 2 и 3.

Теорема 4. *Обратная функция* $H = H(M,\ T)$ *к функции* $M = M(T,\ H)$ *может быть представлена в окрестности точки* $(M = 0,\ T = T_{cr})$ *в виде*

$$H(M,\ T) = r(T)\cdot M + u(T,\ M)\, M^3, \tag{$*$}$$

где $r(T)$, $u(T,\ M)$ — *непрерывные функции своих аргументов, и в окрестности точки* $(M = 0,\ T = T_{cr})$ $r(T) \sim -r_0\cdot\tau$, $r_0 > 0$, $u(T_{cr}, 0) < 0$. *Кроме того,* $M(T, H) \to \pm M(T)$, *в зависимости от того,* $H \nearrow 0$ *или* $H \searrow 0$.

Разложение (*) теоремы 4 лежит в основе феноменологической теории Ландау [4] фазовых переходов второго рода. Поэтому для рассматриваемых моделей справедливы все выводы этой теории, в частности, критические индексы а.и.м. с условием $\sqrt{r} < c < r$ принимают значения, предсказываемые теорией Ландау. Следует подчеркнуть, однако, что разложение (*) есть конечный результат нашего исследования.

Сформулированные теоремы позволяют найти асимптотики корреляционных функций любых порядков и получить ряд других важных следствий, описывающих поведение а.и.м. в окрестности критической точки (см. [1]). В частности, из теоремы 3 следует существование дальнего порядка при $T < T_{cr}$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] P. Bleher, J. Sinai, Investigation of the critical point in models of the type of Dyson's Hierarchical Models, Comm. Math. Phys. **33** (1973), 23—42.

[2] F. J. Dyson, Existence of a phase transition in a one-dimensional Ising ferromagnets, Comm. Math. Phys. **12** (1969), 91. (Русск. пер. «Математика», **16**:2 (1972), 137—152.)

[3] F. J. Dyson, An Ising ferromagnet with discontinuous long-range order, Comm. Math. Phys. 21 (1971), 269. (Русск. пер. «Математика» **16**:3 (1972), 117—129.)

[4] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Статистическая физика, М., «Наука», 1964.

Поступило в редакцию 10 октября 1973 г.