лов

і интегралов, сумм, рядов и произведе-

:trons in metals, ed. J. Cochran, R. Hae-

ела, «Мир», 1966.
v. Lett., 13, 794, 1964.
1968.
. Rev., 113, 928, 1959.
ws, 1968, стр. 886.

ınzler, H. Hsu. Phys. Rev., B1, 366, 1970.
hys. Rev., 149, 231, 1966.

169, 1965.
535, 1970.

Y A VORTEX LATTICE
DR MIXED STATE

ylov

e motion of normal electrons is conside-
e mixed state, H_{c2}. It is shown that the
ctrons such that the quasiparticle excita-
excitation and vice versa. Stationary nor-
cribed in the Landau representation. The
een stationary electron states are deter-
he probability for an electron-hole tran-
ed. The value of W obtained is employed
uctivity and thermal Hall angle at tran-
ults of the calculations are in agreement

КРИТИЧЕСКИЕ ИНДЕКСЫ ДЛЯ СИСТЕМ С МЕДЛЕННО УБЫВАЮЩИМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

П. М. Блехер, Я. Г. Синай

Рассматриваются иерархические модели Дайсона, напоминающие по своим свойствам ферромагнитные спиновые системы со степенным потенциалом взаимодействия. Вычисление критических индексов для таких систем сводится к нахождению и исследованию решений некоторых нелинейных интегральных уравнений. Описаны полученные на этом пути результаты.

Полуфеноменологическая теория фазовых переходов исходит из предположения о том, что термодинамические потенциалы имеют в окрестности критической температуры $T=T_{cr}$ степенные особенности как функции безразмерной температуры $\varepsilon=(T-T_{cr})/T_{cr}$ или внешнего поля $h-h_{cr}$. Показатели соответствующих степеней называются критическими индексами. Для ферромагнитных систем наиболее важными критическими индексами являются индексы α, β, γ, δ, η, ν, через которые выражаются асимптотики следующих величин:

$$C_H\sim\varepsilon^{-\alpha},\quad M\sim(-\varepsilon)^{\beta},\ \chi_T\sim\varepsilon^{-\gamma},\ H\sim|M|^{\delta}\operatorname{sgn}(M),$$
$$\Gamma(r)\sim|r|^{-(d-2+\eta)},\quad \xi\sim\varepsilon^{-\nu}.$$

Здесь C_H — теплоемкость в постоянном магнитном поле, M — спонтанная намагниченность при нулевом поле, H — критическая изотерма, $\Gamma(r)$ — парная корреляционная функция (при $T=T_{cr}$), ξ — радиус корреляции. Для объяснения степенных особенностей привлекают соображения подобия (scaling), предполагая, что всякая система в окрестности критической температуры обладает определенными свойствами автомодельности (см. [1]). Задача теории состоит в определении значений критических индексов по виду гамильтониана взаимодействия.

В последнее время стало ясно, что изучение критической области для классических решетчатых моделей с медленно убывающим потенциалом существенно проще, чем для короткодействующих потенциалов. Причина кроется в том, что гамильтониан, строящийся по потенциалу $U(r)$, убывающему на бесконечности как $1/r^u$ ($d<u<2d$, d — геометрическая размерность модели) с самого начала обладает свойством подобия: если V', V'' — два объема, расстояние R между которыми велико по сравнению с их размерами, то энергия взаимодействия между ними H^{int} в главном порядке равна $S(V')S(V'')/R^u$. Величину $S(V)$ можно условно назвать полным спином в объеме V. Для классических решетчатых моделей, где отдельная переменная $s(x)$, $x\in Z^d$, принимает значения ±1,

$$S(V)=\sum_{x\in V}s(x).$$

Вообще же, можно строить и другие медленно убывающие потенциалы, в которые войдут и другие аддитивные величины. Применяя к H^{int} преобразование подобия, можно сразу же получить, что при критической температуре $T=T_{cr}$ полный спин $S(V)$ должен принимать на типичных конфигурациях значения порядка $|V|^{u/2d}$, где $|V|$ — число точек решетки, входящих в V. Это сразу дает величину критического индекса $\eta=0$, если взять в качестве размерности аномальную размерность $d_a=2d/(u-d)$.

Полное математическое исследование моделей со степенным потенциалом пока еще не проведено полностью, хотя отдельные физически убедительные результаты здесь получены (см. [2]). Математическая трудность заключается в том, что при составлении цепочки рекуррентных уравнений для распределения полного спина возникают дополнительные члены из-за приграничного взаимодействия, аккуратный учет которых не вполне прост.

В данной работе рассматриваются так называемые иерархические модели, введенные Дайсоном [3], имитирующие во многих отношениях системы со степенным потенциалом, но несколько более простые для анализа из-за отсутствия в них упомянутых граничных членов. В то же время есть основания полагать, что поведение иерархических моделей и моделей со степенным потенциалом взаимодействия в окрестности критической точки в принципе одинаково.

В иерархических моделях потенциал взаимодействия не является трансляционно-инвариантным, но в основном он также убывает степенным образом. Благодаря специальному виду гамильтониана рекуррентные уравнения для распределения вероятностей полного спина принимают довольно простой вид и допускают детальное математическое исследование. Возникающие при этом выражения для критических индексов можно рассматривать как подтверждение формул Вильсона (см. [4]). В конце статьи мы указываем для иерархических моделей аналог ε-разложения Вильсона, где вместо разложения по параметру размерности ε появляются разложения по параметру, связанному с показателем степени в дальнодействующем потенциале.

Гамильтонианы в иерархических моделях строятся для объемов V_n, состоящих из k^n точек ($k=2^d$, d — геометрическая размерность модели), причем каждый объем V_n разделен на k равных подобъемов V_{n-1,i_1}, $i_1=1,\ldots,k$; каждый из таких подобъемов разделен на k равных подобъемов V_{n-2,i_1,i_2} и т. д. Набор подобъемов

$$V_{n-s,i_1,\ldots,i_s}$$

образует иерархическую структуру объема V_n. Гамильтониан $H_n(V_n)$ в объеме V_n для ферромагнитного случая определяется с помощью рекуррентного соотношения

$$H_n(V_n)=\sum_{i=1}^{k} H_{n-1}(V_{n-1,i})-|V_n|^{-\zeta}[S(V_n)]^2, \tag{1}$$

где ζ — параметр модели, $S(V_n)$ — полный спин в объеме V_n. Ясно, что (1) описывает бинарное взаимодействие, которое, однако, не является трансляционно-инвариантным. Потенциал, отвечающий (1), убывает на больших расстояниях r как $1/r^u$, $u=d\zeta$. По этой причине имеет смысл рассматривать $\zeta>1$, иначе свободная энергия будет расти быстрее, чем первая степень объема. Кроме того, при $\zeta>2$ в системе вообще отсутствуют фазовые переходы (см. [3]). Таким образом, остается $1<\zeta<2$.

Критическая температура T_{cr} однозначно определяется тем, что для нее

$$H^{int}=-|V_n|^{-\zeta}[S(V_n)]^2$$

принимает на типичных конфигурациях значения порядка 1. Это означает, что критический индекс $\eta=0$, если в качестве аномальной размерности d_a принять величину $2d/(u-d)$.

Введем распределение вероятностей для полного спина

$$f_n(t;\ \beta)=\text{Prob}\ (S(V_n)=t;\ \beta)$$

в объеме V_n при обратной температуре β и нулевом внешнем поле. Из вида гамильтониана (1) легко следует цепочка рекуррентных соотношений

$$f_{n+1}(t;\beta)=\frac{\Xi_{n-1}^{k}(\beta)}{\Xi_n(\beta)}\exp\{\beta t^2|V_n|^{-\zeta}\}\sum f_n(t_1;\beta)\dots f_n(t_k;\beta), \tag{2}$$

причем суммирование производится при условии $\Sigma t_i=t$. Перейдем к распределению для нормированного среднего спина, положив

$$h_n(z;\ \beta)\Delta_n=f_n(z\,|\,V_n|^{\zeta/2};\ \beta),\ \Delta_n=2\,|\,V_n|^{-\zeta/2}.$$

Тогда из (2) имеем

$$h_{n+1}(z;\beta)=L_n e^{\beta z^2}\sum h_n(z_1;\beta)\dots h_n(z_k;\beta)\Delta_n^{k-1},$$

причем

$$\sum z_i=zk^{-\zeta/2}.$$

При $n\to\infty$ функции $h_n(z;\ \beta_{cr})$ сходятся к функции $h(z;\ \beta_{cr})$, являющейся решением нелинейного интегрального уравнения

$$h(z;\beta_{cr})=Le^{\beta_{cr}z^2}\int\dots\int\prod_{i=1}^{k}h(z_i;\beta_{cr})\,\delta\left(\sum_{i=1}^{k}z_i-\gamma z\right)\prod_{i=1}^{k}dz_i, \tag{3}$$

где $\gamma=k^{-\zeta/2}$.

В [7] и [8] было исследовано гауссовское решение

$$h(z;\ \beta)=[a_0(\beta)/\pi]^{1/2}\exp\ (-a_0(\beta)z^2),$$
$$a_0(\beta)=\beta\,k^{2-\zeta}/(k-k^{2-\zeta})$$

уравнения (3) и было показано, что это решение является устойчивым при $\zeta<{}^3/_2$ и дает индексы, предсказываемые теорией Ландау. Устойчивость понимается в том смысле, что сходимость к гауссовскому решению сохраняется при малом возмущении затравочного взаимодействия.

При $\zeta>{}^3/_2$ гауссовское решение заведомо неустойчиво. Оказывается, что при таких ζ возникают негауссовские устойчивые решения (3).

С помощью замены

$$h(z;\ \beta)=\exp(-a_0(\beta)z^2)g(z;\ \beta)$$

уравнение (3) приводится к виду

$$g(z;\beta)=L\int\dots\int\exp\{-\beta Q(z_1,\dots,z_k)\}\prod_{i=1}^{k}g(z_i;\beta)\,\delta\left(\sum_{i=1}^{k}z_i-\gamma z\right)\prod_{i=1}^{k}dz_i,$$

$$Q(z_1,\dots,z_k)=\left[z_1^2+\dots+z_k^2-\frac{1}{k}(z_1+\dots+z_k)^2\right]\frac{k^{2-\zeta}}{k-k^{2-\zeta}}. \tag{4}$$

Гауссовскому решению отвечает

$$g^{(0)}(z;\ \beta)\equiv\text{const}=[a_0(\beta)/\pi]^{1/2}.$$

Спектр линеаризованной задачи имеет в этом случае вид k, k/c, k/c^2, ..., где $c=k^{2-\zeta}$. Согласно общей теории бифуркаций, для нелинейных преобразований конечномерного пространства новые ветви решений возникают при таких значениях параметров, когда в спектре линеаризованной задачи имеется единица. Нами показано, что и в бесконечномерном случае нелинейного интегрального оператора, стоящего в правой части (4), около точек $\zeta_l=2-1/l$, $l=2, 3, \ldots$, возникают негауссовские решения, убывающие как $\exp(-\varepsilon|z|^s)$, где $s=2/(2-\zeta)$ и близко к $2l$, $\varepsilon=(c_l-c)a$,

$$a=\frac{k(k-1)}{2}\int e^{-\varphi(\beta)z^2}e_l(z;\beta)\int\ldots\int\exp\{-\beta Q(z_1,\ldots,z_k)\}\cdot$$

$$\cdot e_l(z_1;\beta)\,e_l(z_2;\beta)\,\delta\left(\sum_{i=1}^{k}z_i-\gamma z\right)\prod_{i=1}^{k}dz_i\,dz,$$

где $e_l(z;\ \beta)$ — собственная функция линеаризованной задачи для гауссовского решения, отвечающая собственному числу

$$\lambda_l=k/c^l\approx 1,\quad \varphi(\beta)=\beta\,\frac{k^{2-\zeta}-1}{k-k^{2-\zeta}}.$$

Оказывается, что всегда $a\neq 0$.

Для того чтобы объяснить появление негауссовских решений, фиксируем в (4) $\beta=1$ и разложим произвольную функцию $g(z;\ 1)=g(z)$ в ряд по собственным функциям $e_l(z;\ 1)$:

$$g(z)=1+\sum_{l=0}^{\infty}\alpha_l e_l(z;\ 1).$$

Подставляя это разложение в (4), можем переписать (4) как систему уравнений для коэффициентов α_l:

$$\alpha_l=\lambda_l\alpha_l+\sum_{m,n=1}^{\infty}d_{mn}^{(l)}\,\alpha_m\alpha_n.$$

Гауссовскому решению отвечает $\alpha_l\equiv 0$. Если какое-либо λ_{l_0} близко к 1, то другое решение можно записать в виде

$$\alpha_{l_0}=(1-\lambda_{l_0})/d_{l_0l_0}^{(l_0)}+O((1-\lambda_{l_0})^2),\quad \alpha_l=O((1-\lambda_{l_0})^2)$$

при $l\neq l_0$. Более того, для негауссовского решения можно написать формальное разложение по степеням малого параметра $1-\lambda_{l_0}$. Однако сходимость такого разложения совершенно неясна.

Математически более аккуратное построение негауссовских решений проводится в два этапа и в основных чертах следует общей теории бифуркаций и инвариантных многообразий (см. [5, 6]). Будем рассматривать правую часть (4) как результат применения нелинейного преобразования T к функции g. Тогда решение уравнения (4) есть неподвижная точка для T: $g=Tg$. Так как все рассматриваемые нами неподвижные точки неустойчивы, то их нахождение следует начинать с построения «устойчивой сепаратрисы», т. е. с построения таких функций h, для которых T^nh сходится к искомому решению g при $n\to\infty$. Более точно, мы строим вначале такие функции h, которые под действием итераций T^n остаются все время вблизи h. Оказывается, вид таких функций можно более или менее явно описать. А именно, рассмотрим l_0-параметрическое семейство функций вида

$$h(z; a) = \exp\left[-\varepsilon e_{l_0}(z; 1) + \sum_{i=0}^{l_0} a_i e_i(z; 1)\right].$$

Методом сжатых отображений показывается, что найдется однозначно определенный набор параметров $\bar{a}_0, \ldots, \bar{a}_{l_0}$, при котором функция $h(z; \bar{a})$ лежит на сепаратрисе. При этом все $\bar{a}_i$ пропорциональны (в главном порядке) ε^2.

Второй этап состоит в проверке того, что для найденных функций $h(z; \bar{a})$ на самом деле имеется сходимость $T^n h(z; \bar{a}) \to g$ при $n \to \infty$. Полное описание всех относящихся сюда вычислений будет опубликовано в другом месте.

Только ветвь, проходящая через гауссовскую ветвь при $\zeta_2 = {}^3/_2$, является устойчивой при $\zeta < {}^3/_2$ в том же смысле, в каком было устойчивым гауссовское решение при $\zeta > {}^3/_2$. Для решений этой ветви в спектре линеаризованной задачи имеется два собственных значения, больших 1, одно из которых, равное k, тривиально и устраняется, если рассматривать только нормированные на 1 решения (4). Второе собственное значение λ, наоборот, играет основную роль и через него выражаются остальные индексы. Именно, применяя рассуждения, похожие на рассуждения работ [7, 8], можно показать, что

$$\alpha = 2 - \frac{1}{\log_2 \lambda}, \quad \beta = \frac{\log_2 c}{2\log_2 \lambda}, \quad \gamma = \frac{1 - \log_2 c}{\log_2 \lambda},$$
$$\delta = \frac{2 - \log_2 c}{\log_2 c}, \quad \eta = 0, \quad \nu = \frac{1 - \log_2 c}{2 \log_2 \lambda}. \tag{5}$$

Формулы (5) позволяют написать аналог ε-разложения Вильсона (см. [4]), где вместо параметра размерности ε появляется параметр $\varepsilon = c_2 - c$. Дело, очевидно, сводится к разложению λ по ε. Есть основания полагать, что λ является только бесконечно-дифференцируемой, а не аналитической функцией ε. Мы нашли для $k=2$ первые два члена ее разложения:

$$\lambda = \sqrt{2} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{65 + 20\sqrt{2}}{27}\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3).$$

В последнее время негауссовская ветвь, проходящая через ζ_2, была исследована одним из нас (П. М. Блехером) на ЭВМ. Результаты счета указывают на то, что эта ветвь не испытывает других бифуркаций и доходит без особенностей до $\zeta = 2$. Подробные результаты вычислений будут опубликованы в другом месте.

Авторы благодарят И. М. Лифшица за полезные обсуждения.

Институт прикладной математики
Академии наук СССР

Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
7 марта 1974 г.

Литература

[1] Г. Стенли, Фазовые переходы и критические явления, «Мир», 1973.
[2] M. E. Fisher, S.-K. Ma, B. G. Nickel. Phys. Rev. Lett., 29, 917, 1972.
[3] F. J. Dyson. Comm. Math. Phys., 12, 91, 1969.

[4] K. G. Wilson. Phys. Rev., B4, 3184, 1971.
[5] В. И. Арнольд. УМН, 27, 119, 1972.
[6] M. W. Hirsh, C. C. Pugh, M. Shub. Bulletin American Math. Soc., 76, 1015, 1970.
[7] P. M. Bleher, Ja. G. Sinai. Comm. Math. Phys., 33, 23, 1973.
[8] П. М. Блехер. Препринт ИПМ № 45, 1973; Труды ММО, в печати.

CRITICAL EXPONENTS FOR SYSTEMS WITH SLOWLY DECREASING POTENTIAL

P. M. Bleher, Ya. G. Sinai

Hierarchical Dyson models are considered whose properties resemble those of ferromagnetic spin systems with a power interaction potential. Calculation of the critical exponents for such systems is reduced to the finding and investigation of the solutions of some nonlinear integral equations. Results obtained in this direction are described.

Т. 67

О ВОЗМОЖНЫХ ФА
ВЗАИМОДЕЙСТВУ
(КВАЗИОД

Л. П. Гор

Рассмотрено влияние взаимо
ных металлов. Показано, что нар
на одной нити сосуществовали ди
зультате взаимодействия возмож
ское состояние пайерлсовского т
сверхпроводящая и диэлектричес
номеров нитей *i*, *k*. Учтено вли
хода и возможность сверхпроводя

1. Вве

Экспериментальные иссл
интерес к свойствам одноме
эксперименты в комплексах
валентности на основе Pt и
залось, что для ряда вещест
NMP – TCNQ [2] и TTF – TC
мости имеет металлический
димость достигает величин
большой ($\sim 10^2 \div 10^3$) ее анизо
вают своеобразный «одномер
вождающийся аномальным с

Существование динамичес
обсуждалось неоднократно. Н
и смягчения фононной моды
Афанасьев и Каган [7]), ан
ская спиновая волна) – Овер
было показано, что пайерлсо
неустойчивостью типа БКШ
выяснено, что сами по себе
некорректными. Они соответ
что то же самое – «лестничн
в одномерном случае и приво
модействия. Из [9] (так назы
ла одновременность диэлект
щей неустойчивостей. В даль
было выяснено, что антифер
пить лишь в случае одного э
одномерном случае существен

Однако даже более строго
ном случае имеет весьма огра