О ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДАХ ВТОРОГО РОДА В АСИМПТОТИЧЕСКИХ ИЕРАРХИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ ДАЙСОНА

П. М. Блехер

Иерархические модели были введены Дайсоном (см. [1]) в связи с изучением фазового перехода первого рода в одномерных ферромагнитных моделях со степенным потенциалом. Впоследствии оказалось (см. [2] — [6]), что иерархические модели и их обобщения — асимптотические иерархические модели (а. и. м.) — играют важную роль в методе ренормализационной группы в теории критических явлений. Применение метода ренормализационной группы приводит в случае а. и. м. к нелинейному интегральному преобразованию

$$f_{k+1}(x;\ \beta)=A(f_k)(x;\ \beta), \tag{1}$$

$$A(f)(x)= \tag{2}$$

$$=Z^{-1}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\ldots\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left(Q(x_1,\ \ldots,\ x_r)\right)f(x_1)\ldots f(x_r)\,\delta\left(\frac{x_1+\ldots+x_r}{r}-\frac{x}{\sqrt{c}}\right)dx_1\ldots dx_r,$$

допускающему теоретическое (см. [2] — [4]) и численное исследования (см. [5]). В уравнении (2) целое число $r\geqslant 2$, вещественное число $c>0$ и квадратичная форма $Q>0$ являются параметрами, задающими а. и. м., а величина $\beta=T^{-1}$ в (1) имеет физический смысл обратной температуры. Функции $f_k(x;\ \beta)$ являются плотностями распределения вероятностей, т. е. $f_k(x;\ \beta)\geqslant 0$, $\int\limits_{-\infty}^{\infty}f_k(x;\ \beta)dx=1$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$. Последнее условие определяет нормирующий множитель Z в (2).

Исследование критических явлений (фазовых переходов второго рода) для а. и. м. приводит к задаче нахождения термодинамически устойчивых неподвижных точек $f^*(x)$ уравнения $f^*=A(f^*)$. Термодинамическая устойчивость означает существование открытого множества Ω в пространстве однопараметрических семейств вероятностных распределений $\{f(x;\ \beta),\ \beta>0\}$, обладающего следующим свойством: для любого $\{f_0(x;\ \beta),\ \beta>0\}\in\Omega$ существует одно и только одно $\beta=\beta_{\mathrm{cr}}$, для которого итерации $A^k(f)(x;\ \beta_{\mathrm{cr}})$ сходятся к $f^*(x)$ (см. [4]).

Заметим, что интерес представляют лишь c, меняющиеся в промежутке $1<c<r$, когда фазовый переход вообще существует (см. [1]). В работе [2] показано, что гауссовская неподвижная точка $f_0^*(x)=\sqrt{\frac{a_0}{\pi}}\exp\left(-a_0x^2\right)$, $a_0=\frac{h+g}{r-c}$, термодинамически устойчива при $\sqrt{r}<c<r$. В [4] для $c=\sqrt{r}-\varepsilon$ $(0<\varepsilon<\varepsilon_0)$, где ε_0 достаточно мало, построена негауссовская термодинамически устойчивая неподвижная точка $f_1^*(x)$ уравнения (1). При $\varepsilon=0$ ветви (по c) неподвижных точек f_1^* и f_0^* сливаются. Результаты численного счета, приведенные в [5], показывают, что ветвь f_1^* термодинамически устойчива при $r=2$ и всех c, $1<c<\sqrt{2}$. Здесь исследуется пограничный случай $c=\sqrt{r}$.

Теорема 1. *При $c=\sqrt{r}$ гауссовская неподвижная точка f_0^* уравнения* (1) *термодинамически устойчива и для любого $\{f_0(x;\ \beta),\ \beta>0\}\in\Omega$ и $k\to\infty$*

$$\|f_k(x;\ \beta_{\mathrm{cr}})-f_0^*(x)\|_{C(\mathbb{R}^1)}\sim\mathrm{const}\cdot k^{-1}.$$

Задача вычисления критических индексов в случае а. и. м. сводится к изучению асимптотического поведения итераций (1) для произвольного семейства $\{f_0(x;\ \beta),\ \beta>0\}\in\Omega$ не только при $\beta=\beta_{\mathrm{cr}}$, но и для β, близких к β_{cr}. При $\sqrt{r}<c<r$ и $c=\sqrt{r}-\varepsilon$ это сделано в работах [3] и [4]. В [5] численно изучен случай $r=2$, $1<c<\sqrt{2}$.

Теорема 2. *Для* $c=\sqrt{r}$ *и данного семейства* $\{f_0(x;\ \beta),\ \beta>0\}\in\Omega$ *существует такое* $\delta>0$, *что если* $\beta_{cr}>\beta>\beta_{cr}-\delta$, *то функции* $A^k(f_0)(x(c/r)^{k/2};\ \beta)$ *сходятся равномерно с экспоненциальной по* k *скоростью к гауссовской плотности* $(2\pi\sigma_1(\beta))^{-1/2}\times\exp(-x^2/2\sigma_1(\beta))$. *При* $\beta\to\beta_{cr}$ *дисперсия* $\sigma_1(\beta)\sim\mathrm{const}\,(\beta_{cr}-\beta)^{-1}$.

Теорема 3. *Для* $c=\sqrt{r}$ *и семейства* $\{f_0(x;\ \beta),\ \beta>0\}\in\Omega$ *найдется такое* $\delta>0$, *что если* $\beta_{cr}+\delta>\beta>\beta_{cr}$, *то для некоторой возрастающей ограниченной последовательности* $0<M_1(\beta)=M_1<M_2(\beta)=M_2<\ldots$, *зависящей от* β, *функции* $f_k(x(c/r)^{k/2}\pm M_kc^{k/2};\ \beta)$ *сходятся равномерно на любом компакте и с экспоненциальной по* k *скоростью к гауссовской плотности* $\frac{1}{2}(2\pi\sigma_2(\beta))^{-1/2}\exp(-x^2/2\sigma_2(\beta))$. *Кроме того, при* $\beta\to\beta_{cr}$ *дисперсия* $\sigma_2(\beta)\sim\mathrm{const}\,(\beta-\beta_{cr})^{-1}$ *и* $\lim\limits_{k\to\infty}M_k(\beta)=M(\beta)\sim\mathrm{const}\,(\beta-\beta_{cr})^{1/2}\sqrt{|\ln(\beta-\beta_{cr})|}$.

В последних двух теоремах настоящей заметки изучаются а. и. м. при ненулевом внешнем поле H. Заметим, что для а. и. м. введение внешнего поля приводит к рассмотрению функций $f_k(x;\ \beta,\ H)=L_kf_k(x;\ \beta)\exp(c^{k/2}\beta^{1/2}Hx)$ (см. [3]).

Теорема 4. *Для* $c=\sqrt{r}$ *и данного семейства* $\{f_0(x;\ \beta),\ \beta>0\}\in\Omega$ *существуют такие* $\delta,\ \delta'>0$, *что если* $\beta_{cr}+\delta>\beta>\beta_{cr}-\delta$ *и* $\delta'>H>-\delta'$, $H\neq0$, *то для некоторой монотонной ограниченной последовательности* $M_1,\ M_2,\ \ldots,\ \lim\limits_{k\to\infty}M_k=M=M(\beta,\ H)$, *зависящей от* β, H, *функции* $f_k(x(c/r)^{k/2}-M_kc^{k/2};\ \beta,\ H)$ *сходятся равномерно и с экспоненциальной скоростью по* k *к гауссовской плотности* $(2\pi\sigma(\beta,\ H))^{-1/2}\times\exp(-x^2/2\sigma(\beta,\ H))$.

Функция $M=M(\beta,\ H)$ определяет уравнение состояния для рассматриваемой а. и. м. Точка $\beta=\beta_{cr}$, $H=0$, является особой точкой уравнения состояния. Вид уравнения состояния в окрестности этой особой точки дается следующей теоремой.

Теорема 5. *В предположениях теоремы* 4

1. $M(\beta,\ H)$ — *монотонно возрастающая функция* H, *непрерывная при* $H\neq0$ *и при* $H=0$, $\beta\leqslant\beta_{cr}$.

2. *При* $\beta>\beta_{cr}$ $\lim\limits_{H\to\pm0}M(\beta,\ H)=\pm M(\beta)$ (*см. теорему* 3).

3. *Функция* $H=H(\beta,\ M)$, *являющаяся обратной к функции* $M(\beta,\ H)$, *имеет при* $\beta\to\beta_{cr}$ *и* $M\to0$ *вид* $H=(L_1(\beta_{cr}-\beta)M+L_2M^3/|\ln M|)(1+o(1))$, *где* $L_1,\ L_2>0$.

Замечание. Эта формула показывает, что на границе применимости феноменологической теории Ландау (а она, как показано в [3], применима при $\sqrt{r}<c<r$) в особенности уравнения состояния появляется логарифмический множитель. Отметим в связи с этим, что при $c<\sqrt{r}$ в особенность уравнения состояния входят дробные степени M (см. [4]).

ЛИТЕРАТУРА

[1] F. J. Dyson, Existence of a phase transition in a one-dimensional Ising ferromagnets, Comm. Math. Phys. 12 (1969), 91 (русск. перев.: Математика 16:2 (1972), 137—152.

[2] P. M. Bleher, Ja. G. Sinai, Investigation of the critical point in models of the type of Dyson's hierarchical models, Comm. Math. Phys. 33 (1973), 23—42.

[3] П. М. Блехер, Фазовый переход второго рода в некоторых моделях ферромагнетизма, Труды ММО 33 (1975), 155—222.

[4] P. M. Bleher, Ja. G. Sinai, Critical Indices for Dyson's Asymptotically Hierarchical Models, Comm. Math. Phys. 45 (1975), 247—278.

[5] П. М. Блехер, Критические индексы дальнодействующих моделей (численный счет), препринт ИПМ АН СССР, № 3, 1975.

[6] G. Gallavotti, H. J. F. Knops, The hierarchical model and the renormalization group, Inst. Theor. Fys. Univ. Nijmegen, preprint (1974).

Поступило в Правление общества 14 июня 1977 г.